## 4.4. Asal ve Maksimal İdealler

**Tanım 4.4.1.** $R$ değişmeli bir halka ve $P$ de $R$ nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $a,b\in R$ ve $ab\in P$ olsun $\Rightarrow a\in P$ veya $b\in P$ ise $P$ ye $R$ nin bir asal ideali denir.

**Örnek:** $p\in \mathbb{P}$ olmak üzere, $(p)$ ideali $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealidir.

**Örnek:** $\mathbb{Z}$ de $(6)$ ideali asal değildir. Çünkü $2{,}3\in(6)$ fakat $2\notin(6)$ ve $3\notin(6)$ dır.

**Örnek:** $\mathbb{Z}$ de $10\mathbb{Z}$ ideali asal ideal değildir. Çünkü $2.5\in 10\mathbb{Z}$ fakat $2\notin 10\mathbb{Z}$ vey $5\notin 10\mathbb{Z}$ dır.

**Örnek:** $\mathbb{Z}$ de $3\mathbb{Z}$ ideali asal idealdir.

$a,b\in\mathbb{Z}$ için $ab\in 3\mathbb{Z}\Rightarrow ab=3k\Rightarrow 3\mid ab \Rightarrow 3\mid a \vee 3\mid b$
$\quad 3\in \mathbb{P}$

$\Rightarrow a\in 3\mathbb{Z}$ veya $b\in 3\mathbb{Z}$



CamScanner ile tarandı

**Teorem 4.4.2.** $R$ bir TİB (temel ideal bölgesi) olsun. $R$ nin bir $P$ idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $n \in R$ asal veya sıfır olmak üzere $P=(n)$ olmasıdır.

**Teorem 4.4.3.** $R$ birimli ve değişmeli bir halka o.o. $P$ $(P \neq R)$, $R$ nin bir ideali olsun. $P$ nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $R/P$ bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır.

**İspat:** $(\Rightarrow:)$ $P$ bir asal ideal olsun. $R$ birimli ve değişmeli bir halka old.dan $R/P$ de birimli ve değişmelidir. $R/P$ nin T.B. olduğunu göstermek için sıfır bölensiz old göst.

$a+P, b+P \in R/P$ için $(a+P)(b+P) = ab+P = 0+P$

$\Rightarrow ab \in P$, $P$ asal ideal old.dan $a \in P \vee b \in P$ dir.

yani $a+P=P$ veya $b+P=P$ dir. $R/P$ sıfır bölensizdir.



CamScanner ile tarandı

($\Leftarrow$:) $R/P$ bir T.B. olsun. $P$'nin asal ideal old. göst.
$a,b \in R$ için $ab \in P$ olsun. $R/P$ de sıfır bölen olmadığından $P = ab+P = (a+P)(b+P) \Rightarrow a+P = P$ veya $b+P = P$
$\Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ dir. $P$ asal idealdir.

**Örnek:** $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_7$ T.B. dir.

**Örnek:** $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasında $P = 3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ideali asal mıdır?
$(3,1),(1,7) \in R$ ve $(3,1)(1,7) = (3,7)$ olup $P$'nin elemanıdır.
Ancak $(3,1),(1,7) \notin P$ old.dan asal ideali değildir.

**Örnek:** $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ halkasının bütün idealleri
$I_1 = (\bar{0}), I_2 = (\bar{6}), I_3 = (\bar{4}), I_4 = (\bar{3}), I_5 = (\bar{2}), I_6 = (\bar{1})$
$\mathbb{Z}_{12}$ birimli ve değişmeli halkadır.
$\mathbb{Z}_{12}/_{I_4} \cong \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{12}/_{I_5} \cong \mathbb{Z}_2$.



CamScanner ile tarandı

**Tanım 4.4.4.** R değişmeli bir halka ve M de R nin kendinden farklı bir ideali olsun. R nin, M yi kapsayan M ve R den başka hiçbir ideali yoksa, M ye R nin bir maksimal ideali denir.

**Teorem 4.4.5.** Birimli ve değişmeli bir halkada en az bir maksimal ideal vardır.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_6$ halkasının maksimal ideallerini bulalım. $I_1=(\bar{0})$, $I_2=(\bar{2})$, $I_3=(\bar{3})$, $I_4=(\bar{1})$ olup

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{Z}_6 & \\ I_2 \arrow[ur] & & I_3 \arrow[ul] \\ & I_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

olup $I_2$ ve $I_3$, $\mathbb{Z}_6$ nın maksimal idealleridir.

**Teorem 4.4.6.** R birimli ve değişmeli bir halka, M R nin kendisinden farklı bir ideali olsun. M nin maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $x \in R-M$ için $M+(x)=R$ dir.

İspat: ($\Rightarrow$:) $M$, $R$ nin maksimal ideali olsun. $x \in R \setminus M$

$\Rightarrow M \subsetneq M+(x) \subset R$ ve $M$ maksimal ideal old. dan

$M+(x)=R$ dir.

($\Leftarrow$:) $\forall x \in R \setminus M$ için $M+(x)=R$ olsun. $I \subsetneq R$ için $M \subsetneq I$

olsaydı $\exists x \in I \setminus M$ bulunabilir ve hipotez gereği

$R=M+(x) \subset I$ olurdu. Bu ise $I \subsetneq R$ olması ile çelişir.

O halde $M=I$ olmalıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}$ de $7\mathbb{Z}$ ideali maksimaldir. Çünkü $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus 7\mathbb{Z}$ için

$7\mathbb{Z}+(x)=\mathbb{Z}$ dir. $(7, x)=1$ old. dan $7a+xb=1$ o.ş.

$\exists a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. $7\mathbb{Z}+(x)=(1)=\mathbb{Z}$ olur.

Teorem 4.4.7. $R$ birimli ve değişmeli bir halka, $M$ $R$ nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $M$ nin maksimal ideal olması için $\Leftrightarrow$ $R/M$ bölüm halkasının cisim olmasıdır.



CamScanner ile tarandı

İspat: ($\Rightarrow$:) $M$ maksimal ideal olsun. $M \neq R$ old. dan $R/M \neq M$ dir. $\forall x \in R/M$ nin $(x+M \neq M)$ tersinin old. göstermeliyiz. $x+M \neq M \Rightarrow x \in R \setminus M$. İlgili teorem gereği (Teorem 4.4.6) $M+(x)=R$ olup $m+ax=1$ o.ş. $\exists m \in M$, $\exists a \in R$ vardır. $m=1-ax \in M \Rightarrow (a+M)(x+M)$
$= ax+M = 1+M$ olup
$a+M = (x+M)^{-1}$ olur. $R/M$ cisimdir.

($\Leftarrow$:) $R/M$ cisim olsun. $R/M \neq M$, $M \neq R$ dır. $\forall x \in R \setminus M$ için $x+M \neq M$ dir. $R/M$ cisim old. dan $(a+M)(x+M)$
$= ax+M = 1+M \Rightarrow 1-ax \in M$, $\exists a \in R$ vardır.
$1 \in M+(x) \Rightarrow$ Birimi içeren ideal halkaya eşittir.
Dolayısıyla $M+(x)=R$ olup Teorem 4.4.6 gereği
$M$, $R$ nin maksimal idealidir.



CamScanner ile tarandı

**Sonuç 4.4.7.** Birimli ve değişmeli bir halkanın her maksimal ideali asal idealdir.

**İspat:** $M$ maksimal ise $R/M$ cisim, dolayısıyla T.İ.B. olup Teorem 4.4.3 gereği $M$ ideali asal ideal olur.

**Örnek:** $\mathbb{Z}\times\{0\}$ ideali $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ halkasının bir asal ideali fakat maksimal ideali değildir. $\mathbb{Z}\times\{0\}\subseteq\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

**Örnek:** $2\mathbb{Z}$ halkasında $4\mathbb{Z}$ ideali maksimal fakat asal ideal değildir. Çünkü $2.2\in 4\mathbb{Z}$ fakat $2\notin 4\mathbb{Z}$ dir. (halka birimli değil)